Centre Tamoul d'Enseignement en France
Examen d'aptitude 2018

Épreuve de Mathématiques

Niveau : Terminale S – Durée : 4 heures

Consigne :

1. **Les cartables et les effets personnels devront être placés au-devant ou à l'arrière de la salle d'examen**
2. **La durée de l'épreuve est de 4h**
3. **À la fin de l'examen, aucun retard de rendu ne sera toléré**
4. **Les calculatrices ne sont pas autorisées**
5. **Les téléphones portables devront être éteints**
6. **Le sujet comporte 9 pages (page de garde non comprise)**
7. **Le sujet doit être rendu avec les copies**
8. **Le sujet doit être lu recto-verso**

Cadre réservé à l'administration :

N° d'identification : _____

Avril 2018

Exercice 1 : Quelques points cadeaux

I : Factoriser les expressions suivantes et résoudre les expressions égale à 0 lorsque l'expression est de degrés 2 :

a. $(3x + 3)(x + 3) + (3x + 1)(x + 3)$
b. $(x + 8)(x + 9) + (x + 8)(x + 4)$
c. $(3x - 6)(2x - 2) - (2x - 2)(-9x + 5)$
d. $(3 - x)^2 - (1 + 2x)(3 - x)$
e. $1 - 81x^2 + 1 - 9x + (1 - 9x)^2$
f. $25x^2 - 81 + (5 + 2x)(5x + 9)$
g. $2(x + 1) – x(x +1)$
h. $(2x + 4)^2 - (x + 1)^2$
i. $3x + 2 + (3x + 2)(5x – 1) – 6x + 4$
j. $9x^2 - 42x + 49$

II : Développer et réduire au maximum les expressions précédentes :

Exercice 2 : Etude d'une fonction … révisions

Un peu d'échauffement :

1. Mettre sous forme canonique les équations suivantes :

   a. $h(x) = x^2 - 7x + 6$
   b. $l(x) = x^2 + x - 2$

2. Factoriser h(x) et l(x).

3. Etudier le signe de h(x) et l(x).

L'étude :

Soient les fonctions f et g suivantes sur $[-4; 4]$:

$$f(x) = x^2 - 4 \; et \; g(x) = -x^2 + 4$$

4. Faire un tableau de valeurs avec un pas de 0,5.

5. Tracer soigneusement ces deux courbes sur papier millimétré.

6. Etudier le signe de $f(x)$ et $g(x)$. Décrire les signes par une phrase.

7. On souhaite maintenant étudier la position de f par rapport à g. Pour cela il faut étudier le signe de f(x) – g(x).

   a. Quel doit être le signe de $f(x) - g(x)$ pour dire que $f(x)$ est au-dessus de $g(x)$.
   b. Etudier le signe de $f(x) - g(x)$ et résumer votre étude sous forme d'un tableau de signe.
   c. Faites une phrase décrivant la position de la courbe f par rapport à g.

8. On souhaite enfin déterminer les points communs à f et à g. Cela revient à résoudre $f(x) = g(x)$.

a. Résoudre cette équation et montrer que les points communs sont de coordonnées (-2 ; 0) et (2 ; 0).
b. Calculer les coordonnées des sommets respectifs de f et g.

On note :

$$A\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix} ; B\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$$

Et on note D et C les sommets respectifs de f et g.

9. Quel est la nature du quadrilatère ADBC ? Justifier soigneusement.

Exercice 3 : Trigo et révisions

Résoudre :

$$sin^2(x) = \frac{3}{4} \; ; cos^2(x) = \frac{1}{2} \; ; \; \sin(2x) = \cos(x)$$

Simplifier au maximum :

$$A(x) = \cos(x+\pi).\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - sin^2(x)$$

$$B(x) = \tan(x+\pi) - \tan(x) \; pour \; x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$$

$$C(x) = sin^2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(\pi - x).\sin(-x)$$

Exercice 4 : Révisions de probabilités

Une urne contient cinq boules indiscernables au toucher : deux vertes et trois rouges.
On extrait l'une à la suite et au hasard deux boules de l'urne sans remise.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules vertes figurant dans le tirage.

1. Dessiner l'arbre pondéré de probabilité.
2. Donner le tableau de la loi de probabilité suivi par X.
3. Calculer l'espérance mathématique de X
4. Quel est la probabilité que les deux boules tirées soient de la même couleur ?

On effectue maintenant deux tirages successifs d'une boule en respectant la règle suivante : si la boule tirée est rouge, on la remet dans l'urne ; si elle est verte, on ne la remet pas.

5. Dessiner l'arbre pondéré de probabilité.

Soient les évènements :
- B : Seule la première boule est verte
- C : Une seule des deux boules est verte

6. Calculer P(B) et P(C)
7. Sachant que l'on a tiré exactement une boule verte, quelle est la probabilité que cette boule verte soit la première tirée ?

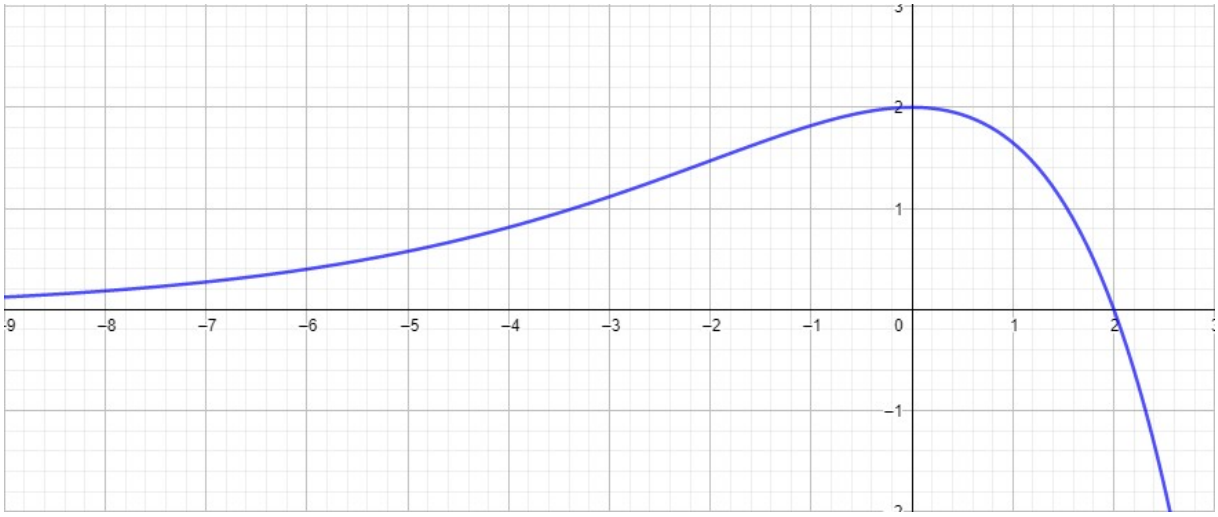
Bienvenue en Terminale

Exercice 5 :

Soit f une fonction définie par :

$$f(x) = (b - x)e^{ax}$$

On donne la courbe représentatif de la fonction f. On donne les points A(0 ; 1) et D(2 ; 0). La tangente à la courbe passant par x = 0 est parallèle à l'axe des abscisses.



Partie 1 :

1. Déterminer en vous aidant de la courbe, les réels a et b.

2. Etudier le signe de f.

3. Etudier les variations de la fonction f et la tracer sur une feuille de papier millimétré entre [-8 ; 4]. Vous prendrez 2cm pour 1 unité.

   ⇨ Pensez à toutes les étapes d'une étude de fonction !

4. Etablir l'équation de la tangente T_1 à la courbe passant par x = -2. Tracer la et commentez cette courbe.

5. Etudier la position de T_1 par rapport à f et vérifier vos commentaires.

Cette position est particulière. On l'appelle le point d'inflexion d'une courbe.
Elle est donnée par la position où la double dérivée s'annule.

6. Montrer que la double dérivée de f s'annule bien en x = -2

Une fonction convexe est une fonction qui possède toutes ses tangentes en dessous de la courbe de la fonction. Une fonction concave est une fonction qui possède toutes ses tangentes au-dessus de sa courbe.

7. Que pouvez-vous dire de la courbe f.

Partie 2 :

Dans cette partie, nous allons essayer de démontrer ce que vous avez observé dans la question 7.

Soit la fonction g définie par $g(x) = x^2$, la fonction h par $h(x) = x^3$ et la fonction l définie par $l(x) = \sqrt{x}$.

8. Tracer ces trois fonctions sur papier millimétré. 2cm pour 1 unité. Intervalle : [-3 ; 3] (Attention, les courbes sur feuilles distinctes)

9. Après avoir calculé les équations de droites, tracer les tangentes aux points -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3.

10. Etudier les variations (en justifiant) de ces fonctions et le signe de leurs double dérivées respectives de g, h et l.

11. Quelle observation pouvez-vous faire entre le signe des doubles dérivées et les allures des courbes ? (Convexité …)

12. Etudier le signe de la double dérivée de f et étudier la convexité de f sur l'ensemble de définition.

Partie 3 :

On définit maintenant la fonction :

$$m(x) = (x + 2)e^{\frac{1}{2}x}$$

13. Etudier la fonction m.

14. Tracer la fonction m sur le repère sur lequel vous avez tracé la fonction f.

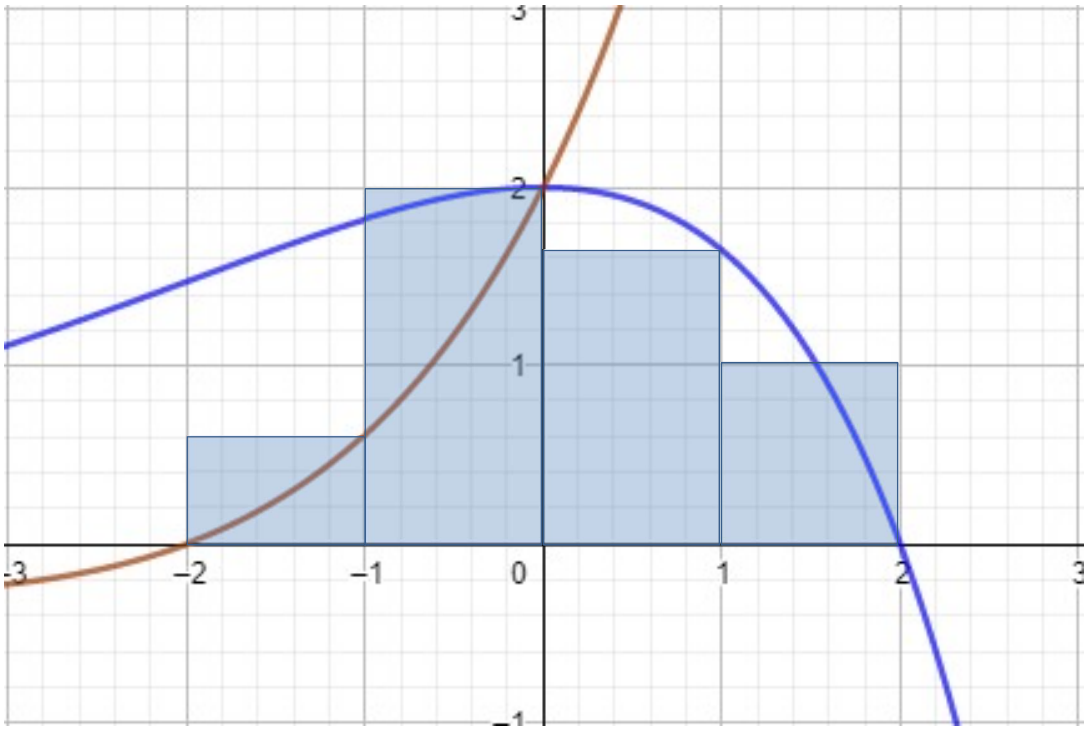
15. Résoudre
    a. $f(x) = m(x)$
    b. $m(x) = 0$
    c. $f(x) = 0$

On veut calculer l'aire A comprise entre :

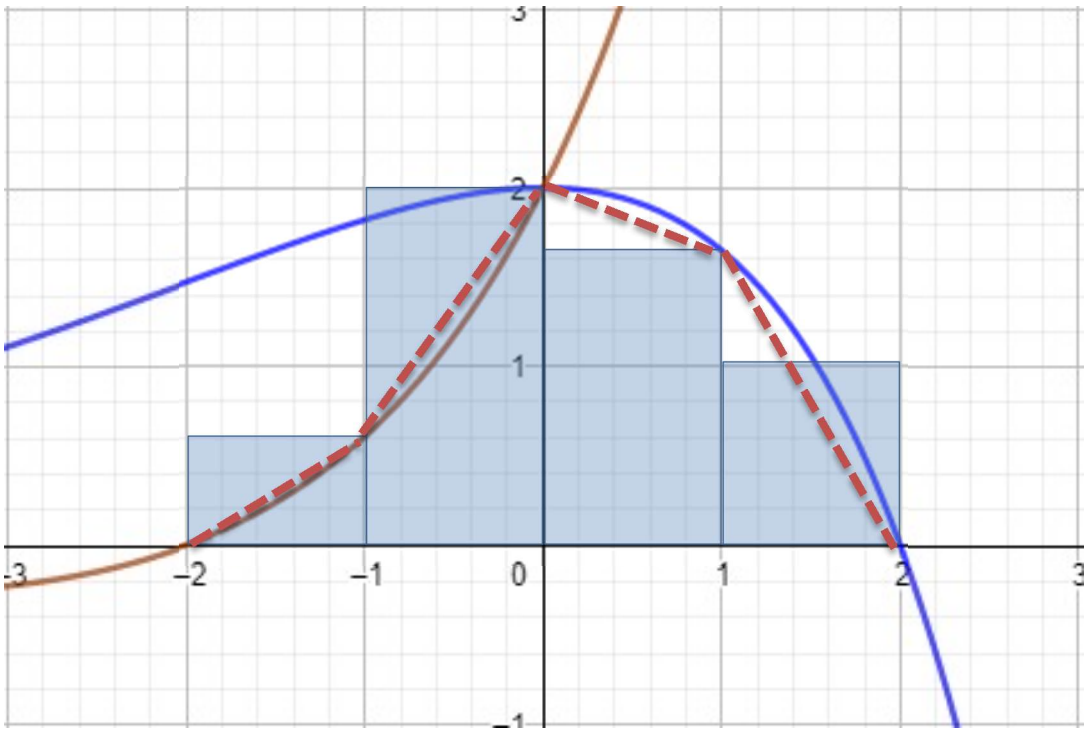
- ⇨ L'axe des abscisses
- ⇨ La courbe x = 2
- ⇨ La courbe x = -2
- ⇨ Les deux courbes f et m

16. Délimiter sur votre figure, l'aire que vous devez calculer.

Dans un premier temps, nous allons approximé à l'aide de rectangles et de trapèzes situés sous les courbes.



17. Calculer l'aire A_R des rectangles ainsi tracés.



18. Calculer l'aire A_T des trapèzes ainsi tracés.

19. Montrer que F et M définie ci-dessous sont bien des primitives de f et m.

$$F(x) = (8 - 2x)e^{\frac{1}{2}x}$$
$$M(x) = 2xe^{\frac{1}{2}x}$$

20. Calculer l'aire A et le mettre en cm². Attention aux unités d'aire.

21. Comparer les valeurs obtenues aux questions 17 et 18 avec celle obtenue précédemment.

Partie 4 : Intégration par partie

On souhaite dans cette partie, retrouver les fonctions F(x) et M(x) par calcul.

En mathématiques, l'intégration par parties est une méthode qui permet de transformer l'intégrale d'un produit de fonctions en d'autres intégrales, dans un but de simplification du calcul.
La formule-type est la suivante, où u et v sont deux fonctions dérivables, de dérivées continues et a et b deux réels de leur intervalle de définition :

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [uv]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

ou encore, en remarquant que $u'(x)\,\mathrm{d}x$ et $v'(x)\,\mathrm{d}x$ sont respectivement les différentielles de u et de v :

$$\int_a^b u\,\mathrm{d}v = [uv]_a^b - \int_a^b v\,\mathrm{d}u.$$

En choisissant pour F :

$$u(x) = (-x + 2)\ et\ v'(x) = e^{\frac{1}{2}x}$$

Et pour M :

$$u(x) = x + 2\ et\ v'(x) = e^{\frac{1}{2}x}$$

22. Calculer les primitives des fonctions f et m.

Exercice 6 :

Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe.

- Un salarié malade est absent.
- La première semaine de travail, le salarié n'est pas malade.
- Si la semaine n le salarié n'est pas malade, il tombe malade la semaine n +1 avec une probabilité égale à 0,04.
- Si la semaine n le salarié est malade, il reste malade la semaine n+1 avec une probabilité égale à 0,24.

On désigne, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par *En* l'évènement « le salarié est absent pour cause de maladie la n-ième semaine ». On note *pn* la probabilité de l'évènement *En*.

On a ainsi : $p1 = 0$ et, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 : 06 $pn < 1$.

1. Déterminer la valeur de $p3$ à l'aide d'un arbre de probabilité.

2. Sachant que le salarié a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait été aussi absent pour cause de maladie la deuxième semaine.

3. Faire l'arbre de probabilité l'évènement En et son contraire.

4. Montrer que :
   Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, pn+1 = 0,2pn +0,04.

5. Montrer que la suite (un) définie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 par un = pn −0,05 est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison r.

6. En déduire l'expression de un puis de pn en fonction de n et r.

7. En déduire la limite de la suite Pn.

8. On admet dans cette question que la suite Pn est croissante. On considère l'algorithme suivant :

Variables	K et J sont des entiers naturels, P est un nombre réel
Initialisation	P prend la valeur 0 J prend la valeur 1
Entrée	Saisir la valeur de K
Traitement	Tant que $P < 0,05 - 10^{-K}$ P prend la valeur $0,2 \times P + 0,04$ J prend la valeur J +1 Fin tant que
Sortie	Afficher J

9. À quoi correspond l'affichage final J ? Pourquoi est-on sûr que cet algorithme s'arrête ?

Cette entreprise emploie 220 salariés. Pour la suite on admet que la probabilité pour qu'un salarié soit malade une semaine donnée durant cette période d'épidémie est égale à $p = 0,05$.

On suppose que l'état de santé d'un salarié ne dépend pas de l'état de santé de ses collègues. On désigne par X la variable aléatoire qui donne le nombre de salariés malades une semaine donnée.

10. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

11. Calculer l'espérance mathématique μ et l'écart type σ de la variable aléatoire X.

12. Interpréter le résultat et conclure.

Exercice 7 :

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout entier nature n :

$$u_{n+1} = \frac{1+3u_n}{3+u_n}.$$

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 1$.
2. **a.** Établir que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n = \frac{(1-u_n)(1+u_n)}{3+u_n}$.

   b. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
   En déduire que la suite (u_n) converge.

Partie B :

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout entier nature n :

$$u_{n+1} = \frac{1+0,5u_n}{0,5+u_n}.$$

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. On considère l'algorithme suivant :

Entrée	Soit un entier naturel non nul n
Initialisation	Affecter à u la valeur 2
Traitement et sortie	POUR i allant de 1 à n Affecter à u la valeur $\frac{1+0,5u}{0,5+u}$ Afficher u
	FIN POUR

Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $n = 3$. Les valeurs de u seront arrondies au millième.

i	1	2	3
u			

2. Pour $n = 12$, on a prolongé le tableau précédent et on a obtenu :

i	4	5	6	7	8	9	10	11	12
u	1,008 3	0,997 3	1,000 9	0,999 7	1,000 1	0,999 97	1,000 01	0,999 996	1,000 001

Conjecturer le comportement de la suite (u_n) à l'infini.

3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $-\frac{1}{3}$.

b. Calculer v_0 puis écrire v_n en fonction de n.

4. a. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $v_n \neq 1$.

b. montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \frac{1+v_n}{1-v_n}$.

c. Déterminer la limite de la suite (u_n).